Séance 1 — 50 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier. Aucune démonstration n'est au programme pour ce chapitre.

Page de garde — Partie 1 *2 min*

Anecdote La citation de Laplace clôt son *Essai philosophique sur les probabilités*, version grand public de sa *Théorie analytique des probabilités* (1812). L'Essai reprend un cours donné en 1795 à l'École normale de l'an III. *(P.-S. de Laplace,* Essai philosophique sur les probabilités, *1814)*

I. Formule des probabilités totales — Définition 1 *6 min*

Au tableau Le dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A_1 = \{6\}$, $A_2 = \{4;5\}$, $A_3 = \{1;2;3\}$. Les trois conditions, une par une : probabilités $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ non nulles ; aucun numéro commun à deux évènements ; à eux trois, tous les numéros. Contre-exemple : « pair » et « au moins 4 » ne forment pas une partition (4 et 6 sont communs, 1 n'est dans aucun).

Anecdote Décrire une expérience par l'ensemble de ses issues ne date que de 1933 : Kolmogorov fonde alors les probabilités sur les ensembles, près de trois siècles après les premiers calculs de Pascal et Fermat (1654). *(A. N. Kolmogorov,* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *1933)*

Théorème 1 et son arbre *6 min*

Au tableau B est coupé en deux morceaux sans partie commune : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, d'où l'addition. Sur l'arbre, chaque morceau est un chemin, donc un produit (règle du produit, chapitre 102) : $p(B \cap A) = p(A) \times p_A(B)$. **On additionne les chemins qui mènent à B.** Repasser en couleur les deux chemins.

Exemple 1 — lecteurs MP3 *8 min*

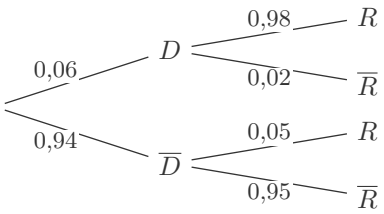
Au tableau Solution rédigée, avec l'arbre à côté.

$p(\overline{D}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

$p_D(\overline{R}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$

$p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$$\begin{aligned} p(R) &= p(R \cap D) + p(R \cap \overline{D}) \\ &= 0{,}06 \times 0{,}98 + 0{,}94 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}0588 + 0{,}047 = 0{,}1058 \end{aligned}$$



Calcul mental : $6 \times 98 = 600 - 12 = 588$ et $94 \times 5 = 470$. Environ 10,6 % des lecteurs sont rejetés, alors que 6 % seulement sont défectueux.

Anecdote Parmi les lecteurs rejetés, la part de lecteurs vraiment défectueux n'est que $\dfrac{0{,}0588}{0{,}1058} \approx 0{,}56$: près d'un rejet sur deux est un « faux positif ». C'est le piège des tests de dépistage, qui ne se lève qu'en distinguant $p_R(D)$ de $p_D(R)$. *(calcul à partir des données de l'exemple)*

Théorème 2 et son arbre *4 min*

Au tableau Avec la partition du dé et B : « obtenir un nombre pair » : $p(B) = p(B \cap \{6\}) + p(B \cap \{4;5\}) + p(B \cap \{1;2;3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Le théorème 1 est le cas de la partition A, $\overline{A}$.

II. Indépendance — Définition 2, exemples 2 et 3 *10 min*

Au tableau **Incompatibles $\neq$ indépendants** : A et $\overline{A}$ sont incompatibles, mais $p(A \cap \overline{A}) = 0 \neq p(A) \times p(\overline{A})$ dès que $0 < p(A) < 1$.

Ex. 2 : $p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $p(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$; un carreau est rouge, donc $A \cap B = A$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Or $p(A) \times p(B) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$: A et B ne sont pas indépendants.

Ex. 3 : les machines fonctionnent de façon indépendante, donc A et B sont indépendants et

$p(A \cap B) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$. Faire remarquer les deux usages : *justifier* (ex. 2) et *utiliser* (ex. 3).

Anecdote Abraham de Moivre, dans l'introduction d'une réédition de *The Doctrine of Chances* (1re édition 1718), définit deux évènements indépendants comme n'ayant aucun lien : la réalisation de l'un ne favorise ni n'empêche celle de l'autre. C'est presque mot pour mot le théorème 3. *(A. de Moivre,* The Doctrine of Chances*, éditions postérieures à 1718)*

Théorème 3, exemple 4 *8 min*

Au tableau Lecture du théorème : « savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B ».
Ex. 4 : $A \cap C$ = {roi de carreau}. Trois preuves au choix : $p_C(A) = \frac{1}{4} = p(A)$; ou $p_A(C) = \frac{1}{8} = p(C)$; ou $p(A \cap C) = \frac{1}{32} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$. Donc A et C sont indépendants : savoir que la carte est un roi ne renseigne pas sur sa couleur.

Anecdote Les enseignes pique, cœur, carreau et trèfle sont nées en France vers 1480, en remplacement des enseignes italiennes et allemandes ; le jeu de 32 cartes est celui du piquet. *(musée français de la Carte à jouer, Issy-les-Moulineaux)*

Théorème 4, exemple 5 *6 min*

Au tableau $p(\overline{T}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. B et T sont indépendants, donc B et $\overline{T}$ aussi (théorème 4) : $p(B \cap \overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$.
Prolongement oral : ni l'un ni l'autre en retard ? En appliquant deux fois le théorème 4, $p(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$.

Anecdote **[attestation incertaine]** Au casino de Monte-Carlo, le 18 août 1913, le noir serait sorti 26 fois de suite à la roulette ; les joueurs, persuadés que le rouge « devait » sortir, auraient perdu des fortunes. Les tirages étant indépendants, le passé n'influence pas le coup suivant. *(récit rapporté par D. Huff,* How to Take a Chance*, 1959 ; pas de source directe du casino)*